

## 波長変換技術入門(2)

# Chap.1 波長変換の概要

### 1. 3 許容幅

[補足]許容幅の種々の定義

### 1.3 許容幅

- ・これまでのことをもう少し解析的に考えます。
- ・した図1.7で、長さ  $L$  の非線形媒質に左側から基本波が入射する場合を考え、右端で得られる第2高調波の強度について考えます。

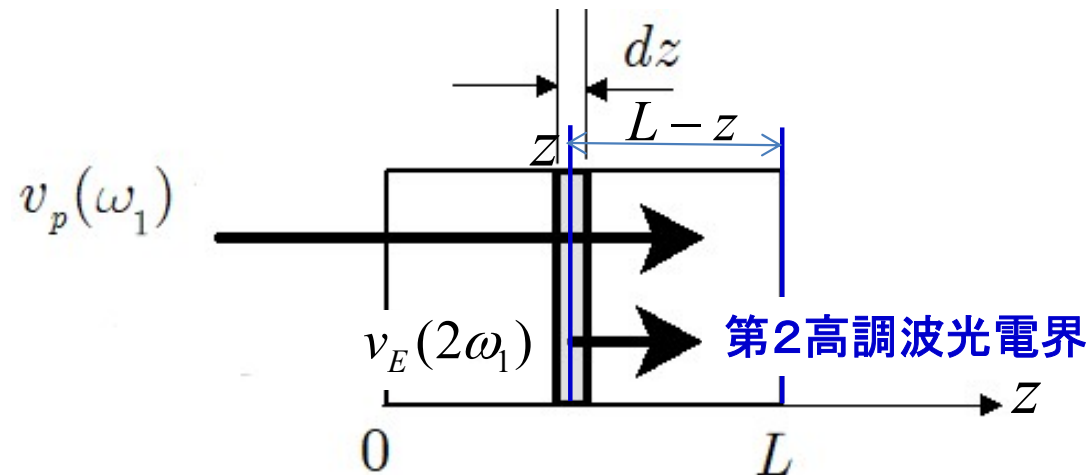


図1.7

- ・位置  $z$  で誘起された分極波から放射される第2高調波が媒質右端に達するまでの時間は、

$$\tau = \frac{L - z}{v_E(2\omega_1)} = \frac{k_2(L - z)}{2\omega_1} \quad (1-10)$$

- ・一方, 位置  $z$  近傍の微小部  $dz$  に誘導される分極からの第2高調波光電界  $dE_{2\omega_1}$  は, 次式で与えられます.

$$dE_{2\omega_1} \propto \cos[2\omega_1(t - \tau) - 2k_1z]dz \quad (1-11)$$

- ・従って媒質全長にわたる寄与は, 次式となります.

$$\int_0^L dE_{2\omega_1} \propto \int_0^L \cos[2\omega_1(t - \tau) - 2k_1z]dz \quad (1-12)$$

- ・式(1-10)を式(1-12)に代入すると下式となります.

$$\int_0^L \cos[2\omega_1(t - \tau) - 2k_1z]dz = \int_0^L \cos[2\omega_1t - k_2L - (2k_1 - k_2)z]dz$$

- ・上式を積分すると, 次式を得ます.

$$\int_0^L dE_{2\omega_1} \propto \left[ \frac{\sin[2\omega_1t - k_2L - (2k_1 - k_2)z]}{-2(2k_1 - k_2)} \right]_0^L$$

$$= \frac{1}{(2k_1 - k_2)} \left\{ \sin(\underbrace{2\omega_1 t - k_2 L}_{\alpha + \beta}) - \sin(\underbrace{2\omega_1 t - 2k_1 L}_{\alpha - \beta}) \right\} \quad (1-13)$$

ここで,  $\alpha + \beta \equiv 2\omega_1 t - k_2 L \quad (1-14) \quad \alpha - \beta \equiv 2\omega_1 t - 2k_1 L \quad (1-15)$

と置き, (1-14)+(1-15), (1-14)-(1-15)より, 次式を得ます.

$$\alpha = 2\omega_1 t - \frac{L}{2}(2k_1 + k_2) \quad (1-16)$$

$$\beta = \frac{L}{2}(2k_1 - k_2) \quad (1-17)$$

\*和積公式を用いれば,  
ただちに得られる。

・次に, 公式  $\cos \alpha \sin \beta = (1/2) \cdot \{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\}$  を用いて, (1-13)を変形すると,

$$\int_0^L dE_{2\omega_1} \propto \frac{2}{(2k_1 - k_2)} \cdot \cos\left[2\omega_1 t - \frac{L}{2}(2k_1 + k_2)\right] \cdot \sin \frac{L}{2}(2k_1 - k_2) \quad (1-18)$$

- ・第2高調波の強度  $I_{2\omega_1}$  は, 光電界の2乗, 即ち(1-14)の2乗に比例します.  
また(1-14) 右辺の $\cos$ 因子は光の角周波数での振動成分を表わしているので  
光強度を考える場合無視できます.
- ・よって, 次式を得ます.

$$I_{2\omega_1} \propto \frac{\sin^2 \frac{L}{2} (2k_1 - k_2)}{(2k_1 - k_2)^2} = \frac{\sin^2 \frac{\Delta k L}{2}}{\Delta k^2} = \frac{L^2}{4} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\Delta k L}{2}}{\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)^2} \quad (1-19)$$

ここで,  $\Delta k = (2k_1 - k_2)$  です.

・なお,

$$\frac{\Delta k L}{2} \equiv \delta \quad (1-20)$$

は, dephasing(位相不整合量)と呼ばれ, 波長変換にとって基本的に重要な量です.

式(1-19)で  $\sin \theta / \theta$  の形の関数はシンク関数(sinc fn.)と呼ばれ,  $\theta \rightarrow 0$  で  $\sin \theta / \theta \rightarrow 1$  (最大値)となります.

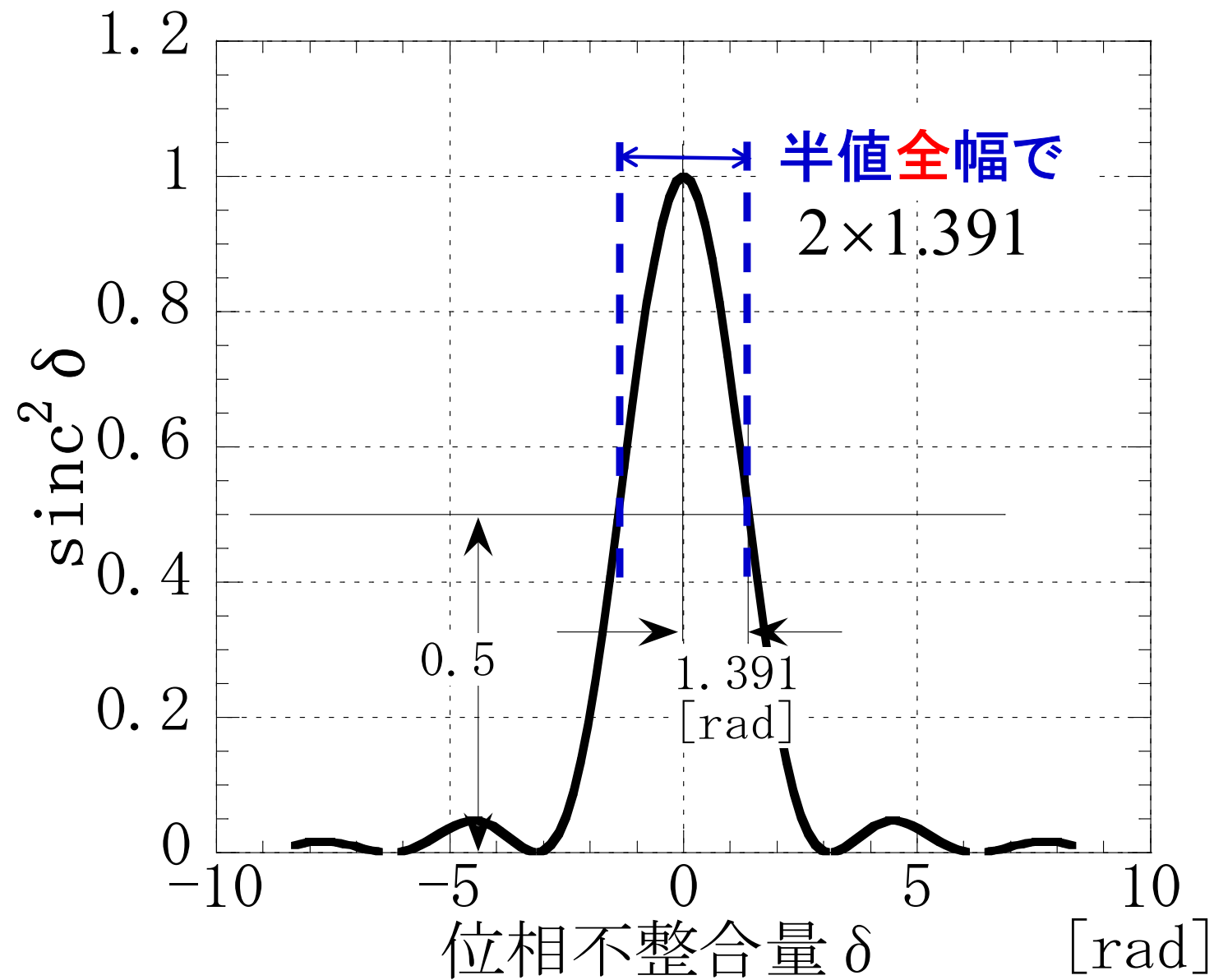


図1.8

- ・(1-19)より, 第2高調波強度は, sinc関数の2乗に比例し, 結晶長の2乗に比例します.

$$\Delta k = (2k_1 - k_2) = 0$$

であれば式(1-19)から第2高調波強度は媒質の長さの2乗に比例して増加します。すなわち、

$$2k_1 = k_2 \quad \longrightarrow \quad n_{\omega_1} = n_{2\omega_1}$$

が成り立てばです。しかし、一般には、媒質の分散特性のため上式は成り立たないので、 $\Delta k \neq 0$  の場合、式(1-19)より、第2高調波強度は図1.9に示す様に周期的に強弱を繰り返します。

- ・基本波の入射端から最初のピークを示すまでの距離をコヒーレンス長 (coherence length) と言い、位相整合していなくとも、  
 “高調波発生に適した位相関係が保たれる有効な長さ”  
 を意味しています。
- ・最初のピークは式(1-19)より、次式を満たす時です。

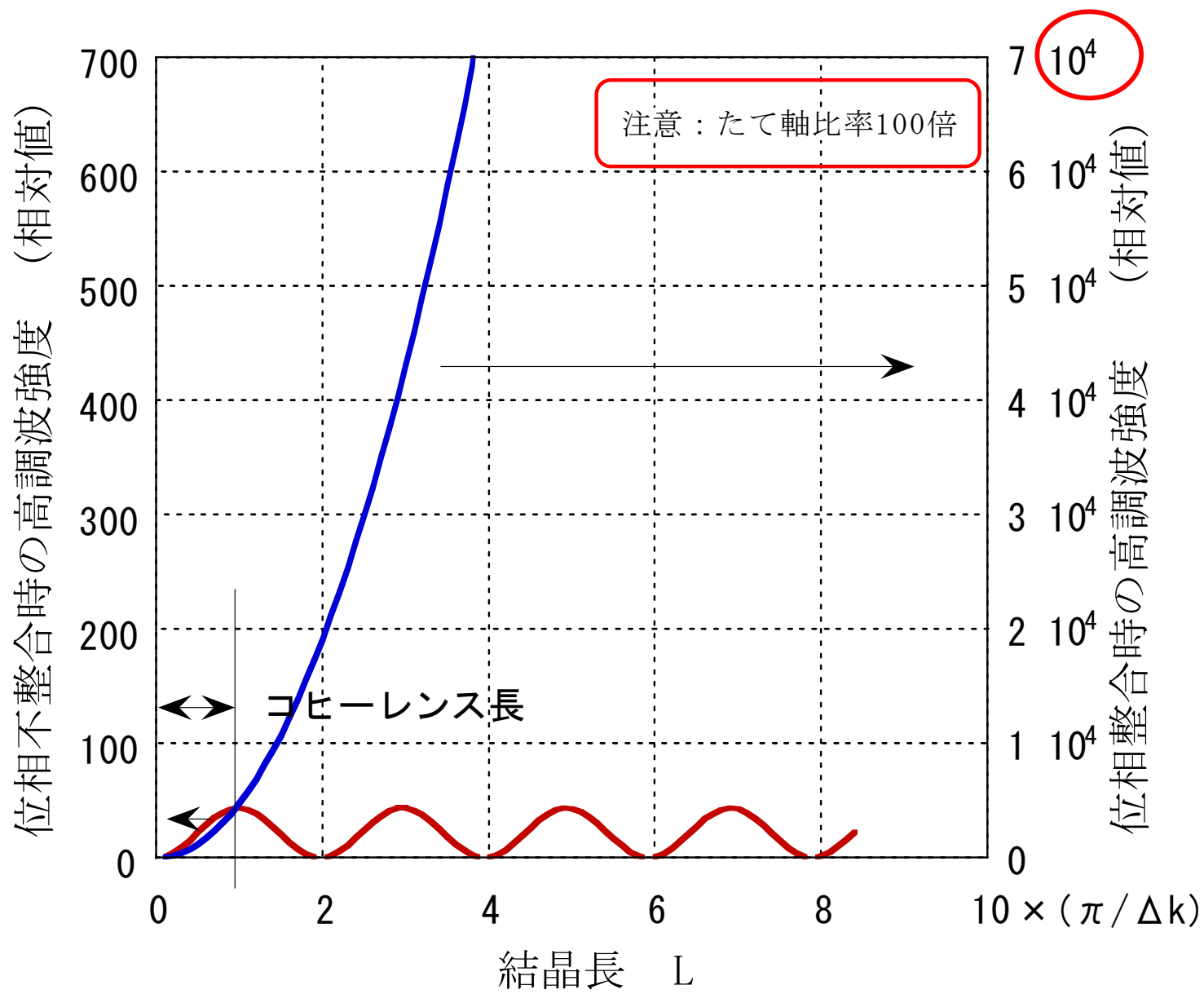


図1.9



$$\frac{\Delta k L}{2} \equiv \frac{(2k_1 - k_2)l_c}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (1-21)$$

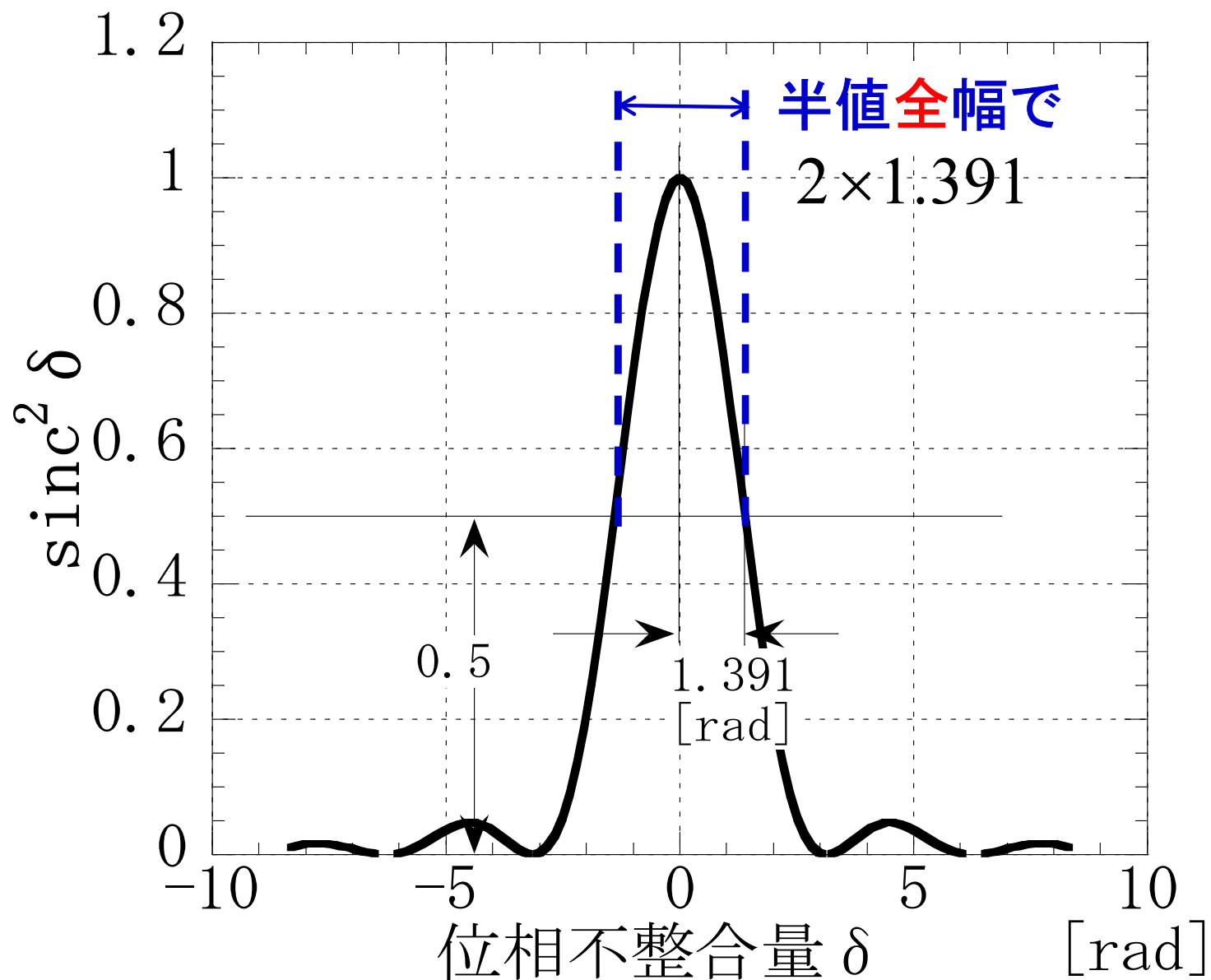
・この式は, (1-6)より次式のように表すことができます.

$$l_c = \frac{\pi c}{2(n_{\omega_1} - n_{2\omega_1})\omega_1} \quad (1-22)$$

・通常  $l_c$  は数 $10\mu\text{m}$  のオーダーです.  $\Delta k = 0$  を何らかの方法で満たさない限り, コヒーレンス長以上に媒質の長さを大きくしても第2高調波強度は大きくなりません.

このことにより, 位相整合が如何に重要か良く理解できます.

## [補足] 許容幅の種々の定義



(a) 半値全幅による許容幅の定義を示す図.

- ・  $\text{sinc}^2 \delta = 1$  ( $\delta = 0$ ) から位相不整合量  $\delta$  の増加で,  $\text{sinc}^2 \delta$  が0.5に低下するまでの全幅(半値全幅(full width at half Maximum; FWHM))を位相不整合量の許される目安とし, ここではこれを許容幅とします\*.
- ・ 図(a)で,  $\text{sinc}^2 \delta$  関数が0.5となる $\delta$ の値は  $\delta = 1.391$  であることは, 数値計算から得られます.
- ・ すると, その半値全幅  $\delta_{FWHM}$  は, 次式のように, およそ $0.886\pi[\text{rad}]$ に相当するので次式を得ます.

$$\delta_{FWHM} = 1.391 \times 2 = 2.782 = 0.8855\pi \quad [\text{rad}]$$

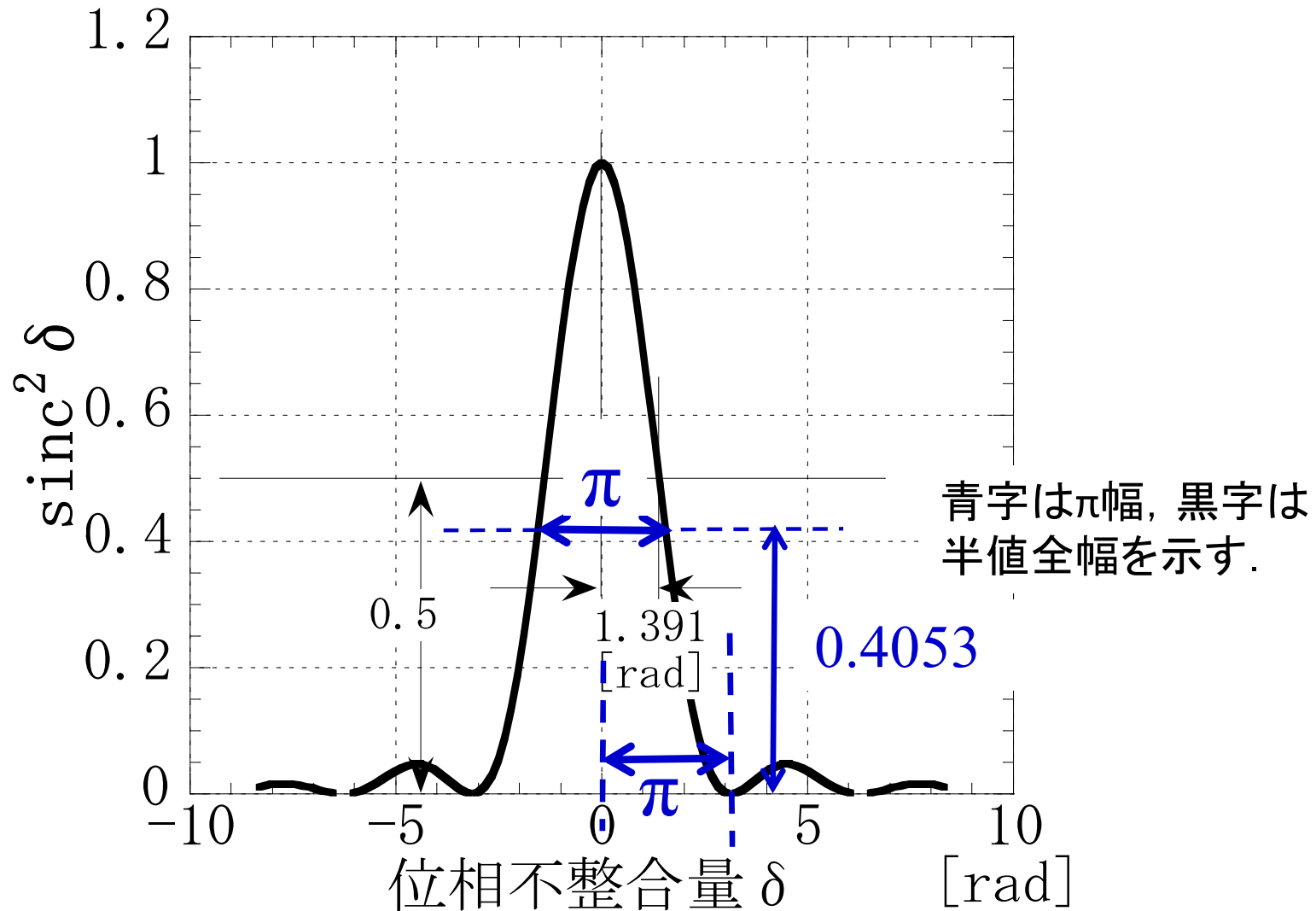
- ・ 従って, 式(1-20)より, 次式を半値全幅定義に基づく許容幅といいます[2],[3].

$$\delta_{FWHM} = \frac{\Delta k \cdot L}{2} = 0.886\pi \quad (2.8-5)$$

\*浅海勝征; 第2高調波発生有位相整合, 青山社 (2001).

## ● $\pi$ 幅の定義

全幅が $\pi$ [rad]となる許容幅もよく用いられます, このとき  $\text{sinc}^2 \delta$  の値は, 0.4053 となります.  $\delta=\pi$ でsinc関数がゼロとなることに由来すると思われます.



*M.L.Stitch ed.; Laser Handbook vol.3, D. Hon; "High Average Power, Efficient Second Harmonic Generation", p.421, North-Holland (1979).*

*V.G.Dmitriev et al.; Handbook of Nonlinear Optical Crystals, 3rd revised ed. Springer (1999).*

## ・半値全幅, 半値半幅, $\pi$ 幅, 何が主流か？

### 半値全幅

$$\delta_{FWHM} = \frac{\Delta k \cdot L}{2} = 1.391 \times 2$$

- ・ 浅海勝征； 第2高調波発生有位相整合, 青山社(2001).
- ・ R. L. Sutherland; Handbook of Nonlinear Optics, Marcel Dekker p.44 (2003).

### 半値半幅

$$\delta_{HWHM} = \frac{\Delta k \cdot L}{2} = 1.391$$

- ・ V.G.Dmitriev et al.; Handbook of Nonlinear Optical Crystals, 3rd reviseded. Springer, p.40 (1999).

### $\pi$ 幅

$$\delta_{\pi} = \frac{\Delta k \cdot L}{2} = \pi$$

- ・ J. Yao and Y. Wang ; “Nonlinear Optics and Solid-State Lasers, p. 53 Springer(2012).
- ・ M.L.Stitch ed.; Laser Handbook vol.3, D. Hon;”High Average Power, Efficient Second Harmonic Generation” , p.436, North-Holland (1979).

\*著者各々が, 好みで選んでいるのではないか？論文を読む場合, 許容幅の比較引用する場合, 注意が必要です.