

# 固体レーザー設計技術入門(2)

## (Introduction to Solid-state Laser Design)

### 2.1 レート方程式と遷移確率

自然放出, 誘導放出, 誘導放出確率

吸収係数, 利得係数, 誘導吸収, 誘導放出断面積

### 2.2 2準位系のレート方程式と飽和現象

### 2.3 4準位レーザーのレート方程式と発振しきい値, スロープ効率

### 2.4 レーザ共振器の縦モード

## 2.1 レート方程式と遷移確率

- まず簡単のため2準位系で考える.

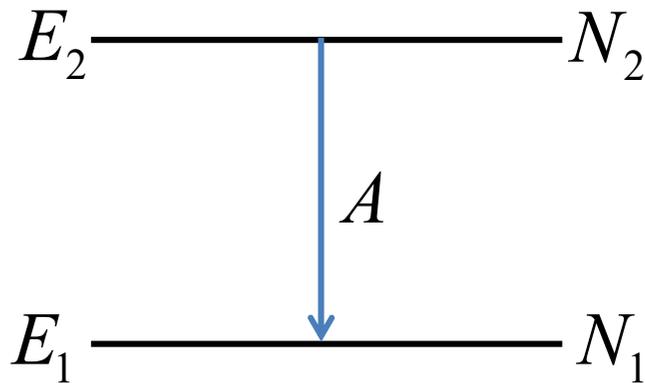


図2.1

- ・熱平衡状態では, 各準位の粒子数密度はボルツマン分布に従っている.

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left[-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right] \quad (2-1)$$

統計的重率(縮退の度合い)

ボルツマン定数

絶対温度

- ・ここで,  $E_1$  状態の粒子に外部からエネルギーを与え,  $E_2$  状態に励起したとする.
- ・系の分布が(2-1)からずれるが, 得たエネルギーを外部に放出してもとの平衡状態に戻ろうとする. これを緩和 (relaxation) 現象という.
- ・緩和には大別して2種類ある.
  - 無放射遷移: 周囲の物質との衝突など. エネルギーを熱として放出.
  - 放射遷移: 電磁波を放出して緩和. 自然放出.

## ● 自然放出とは

・励起状態  $E_2$  の原子は, 全く偶発的に下準位  $E_1$  に遷移し,  $(E_2 - E_1)$  のエネルギーを周波数  $\nu = (E_2 - E_1)/h$  の光として放出する.

・その遷移確率を  $A$  とすると,  $A$  は遷移の程度を表す量で,

“遷移確率=原子1個当たり, 毎秒, その遷移の起こる数

”

と定義される. 単位は[1/s].

・  $N_i$  を  $i$  準位の粒子数密度  $[\frac{1}{cm^3}]$  とすると, 自然放出による準位2の

粒子数密度の時間変化は, 次式で表される.

$$\frac{dN_2}{dt} = -N_2 A \quad \left[ \frac{1}{cm^3 \cdot s} \right] \quad (2-2)$$

- ・このように、ある量の時間変化を記述する式を**レート方程式(rate equation)**という。
- ・(2-2)の解は、

$$N_2(t) = N_2(0)e^{-At} \quad (2-3)$$

で与えられる。  $N_2(t)$  が  $N_2(0)$  の  $1/e$  になるまでの時間を **自然放出寿命時間**  $\tau_{sp}$  といい、(2-3)より、次式となる。

$$\tau_{sp} = \frac{1}{A} \quad [s] \quad (2-4)$$

## ● 誘導放出とは

- ・E2状態の原子があり、外部から、エネルギー差  $E_2 - E_1 (= h\nu)$  に等しい電磁波が入射した場合、入射電磁波と同一位相、同一偏光方位、同一方向に電磁波を放出する現象をいう。

## ● 誘導放出確率

・図2.1の2準位系に, ある単色の(非常にスペクトル幅の狭い)電磁波が入射した場合を考える. アインシュタインのB係数(誘導吸収, 誘導放出係数)を用いると, 誘導遷移確率は, 周波数  $\nu$  における電磁波のエネルギー密度  $\rho(\nu)[J/cm^3]$  に比例する. 例えば, 誘導放出の場合, 次式と書ける.

$$W_{21}\left[\frac{1}{s}\right] = B_{21}\rho(\nu) \quad \left[\frac{1}{s}\right] \quad (2-4)$$

↑  
誘導放出確率

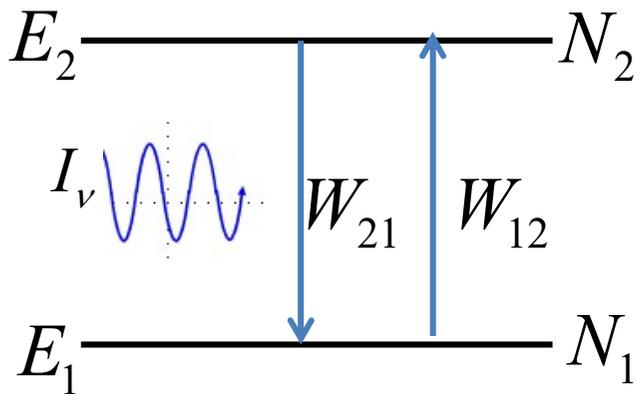


図2.2 2準位系の遷移モデル

・但し, アインシュタインのB係数は, 入射電磁波が単色スペクトルより十分広い幅を持つ場合の話なので, (2-4)は, 厳密には, 次式のように表わさねばならない.

$$W_{21}\left[\frac{1}{s}\right] = B_{21}\rho(\nu)f(\nu) \quad (2-5)$$

↑  
規格化スペクトル形状関数

・なお, (2-4)または(2-5)より, B係数の単位は

$$B_{21} \quad \left[\frac{cm^3}{sJ}\right] \quad \text{となる.}$$

- ・図2.2に示す2準位系に、光強度  $I_\nu$  の単色光波が入射した場合、(誘導)吸収と誘導放出が同時に生じるので、次式が成立する。

$$\frac{d\rho_\nu}{dt} = h\nu(B_{21}N_2 - B_{12}N_1)\rho_\nu f(\nu) = h\nu B\rho_\nu f(\nu)(N_2 - N_1) \quad (2-6)$$

ここで、 $B_{21} = B_{12} \equiv B$  とした。

- ・媒質中、光波伝搬方向を  $x$  とすると、 $x = ct$  の関係があるので、(2-6)は、次式のように変形できる。

(2-6)に  $dx = cdt$  を左辺に代入すると次式を得る。さらに、 $I_\nu = c\rho_\nu$  の関係があるので、上式は、次式のように書き換えられる。

$$\frac{cd\rho_\nu}{dx} = h\nu(B_{21}N_2 - B_{12}N_1)\rho_\nu f(\nu) = h\nu(B_{21}N_2 - B_{12}N_1)\frac{I_\nu}{c} f(\nu)$$

$$\frac{dI_\nu}{dx} = \frac{h\nu}{c} B(N_2 - N_1)I_\nu f(\nu) \quad (2-7)$$

## ●吸収係数, 利得係数, 誘導吸収, 放出断面積

- ・光強度  $I_\nu$  の光波が媒質中を  $dx$  伝搬する間に, 媒質からの吸収を受け, 強度が  $dI_\nu$  減少したとすると, 単位長さ当りの吸収度合い, すなわち, 吸収係数  $\alpha(\nu)$  は, 次式のように定義される.

$$I_\nu \alpha(\nu) = -\frac{dI_\nu}{dx} \Rightarrow \alpha(\nu) = -\frac{1}{I_\nu} \frac{dI_\nu}{dx} \quad (2-8)$$

- ・よって, (2-7)より, 次式を得る.

$$\alpha(\nu) = -\frac{h\nu}{c} Bf(\nu)(N_2 - N_1) = \frac{h\nu}{c} Bf(\nu)(N_1 - N_2) \quad (2-9)$$

- ・一方, 光波伝搬により, 光強度が増幅を受ける場合, 単位長さ当りの光強度の増加を利得係数といい, 吸収の場合と同様, 次式となる.

$$g(\nu) = \frac{1}{I_\nu} \frac{dI_\nu}{dx} = \frac{h\nu}{c} Bf(\nu)(N_2 - N_1) \quad (2-10)$$

- ・(2-9),(2-10)の大きさは, 粒子数密度に依存する. 粒子数密度に依存しない量として, (誘導)吸収断面積  $\sigma_a(\nu)$ , 誘導放出断面積  $\sigma_s(\nu)$  が次式のように定義されている.

$$\text{(誘導)吸収断面積} \quad \alpha(\nu) = \sigma_a(\nu)(N_1 - N_2) \quad (2-11)$$

$$\text{誘導放出断面積} \quad g(\nu) = \sigma_s(\nu)(N_2 - N_1) \quad (2-12)$$

- ・(2-9),(2-10)との比較により, これら断面積は, B係数との間に, 次式の関係がある.

$$\sigma(\nu) = \frac{h\nu}{c} Bf(\nu) \quad (2-13)$$

- ・右辺の単位は  $[J \frac{s}{cm} \frac{cm^3}{sJ}] = [cm^2]$  となるので,  $\sigma(\nu)$  は面積の単位を持つことになる.

- ・なお, (2-10)より, 増幅媒質に入射したコヒーレント光は, 進行距離に対し指数関数的に増加する. ISLD(1)の出力式の導出には, この考え方をを用いた.

$$dI / dx = \alpha I \rightarrow I(x) = I_0 \exp(\alpha x)$$

## 2.2 2準位系のレート方程式と飽和現象

・図2.2に示す2準位系の場合，以下のレート方程式が成り立つ．

$$\frac{dN_2}{dt} = W_{12}N_1 - W_{21}N_2 - \frac{N_2}{\tau} = -W(N_2 - N_1) - \frac{N_2}{\tau} \quad (2-14)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = W_{21}N_2 - W_{12}N_1 + \frac{N_2}{\tau} = W(N_2 - N_1) + \frac{N_2}{\tau} \quad (2-15)$$

ここで， $W_{12} = W_{21} \equiv W$ ， $A = 1/\tau$  とした．(2-14)-(2-15)より，次式を得る．

$$\frac{d(N_2 - N_1)}{dt} \equiv \frac{d\Delta N}{dt} = -2W\Delta N - \frac{2N_2}{\tau}$$

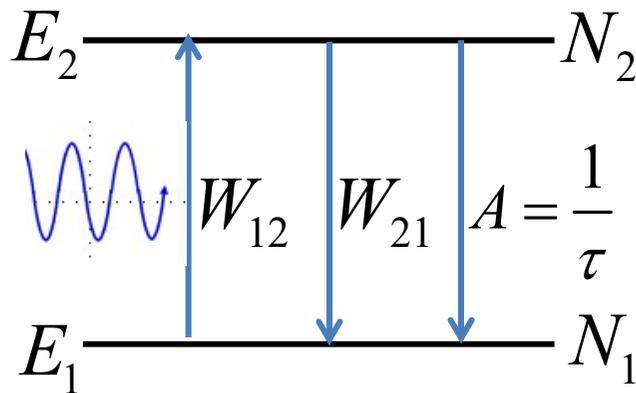


図2.2 2準位系の遷移モデル

・これをさらに変形すると，

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta N}{dt} &= -2W\Delta N - \frac{N_2}{\tau} - \frac{N_2}{\tau} + \frac{N_1}{\tau} - \frac{N_1}{\tau} \\ &= -2W\Delta N - \frac{\Delta N}{\tau} - \frac{N_T}{\tau} \end{aligned} \quad (2-16)$$

ここで， $N_T \equiv N_2 + N_1$

- ・定常状態では(2-16)の左辺=0と置けるから、それを  $\Delta N$  について解くと、次式を得る.

$$\Delta N = -\frac{N_T}{\tau} \cdot \frac{1}{(2W + 1/\tau)} = -\frac{N_T}{(2W\tau + 1)} \quad (2-17)$$

- ・ここで、(2-5)より、 $W = B\rho(\nu)f(\nu)$  , (2-13)より、 $\sigma(\nu) = \frac{h\nu}{c} Bf(\nu)$  であるので、 $W = \rho(\nu) \frac{c\sigma(\nu)}{h\nu}$  となる. さらに、 $I = c\rho$  の関係を用いると、

$$W = \frac{\sigma}{h\nu} I \quad (2-18)$$

を得る. よって、(2-17)は次式のように書き換えられる.

$$\Delta N = -\frac{N_T}{\tau} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2\sigma I}{h\nu} + 1/\tau\right)} = -\frac{N_T}{\left(\frac{2\sigma\tau I}{h\nu} + 1\right)} = -\frac{N_T}{\left(\frac{I}{I_s} + 1\right)} \quad (2-18)$$

ここで、 $I_s \equiv \frac{h\nu}{2\sigma\tau}$  (2-19) とした.

\*2準位系の場合factor2が付く.

- ・(2-18)最右辺で, 入射光強度 が非常に小さい場合,

$$\Delta N = (N_2 - N_1) \simeq -N_T < 0$$

となるので,  $N_2 < N_1$  であり, 反転分布は達成されない.

- ・入射(励起)光強度を非常に大きく( $I \gg I_s$ )しても,

$$\Delta N = (N_2 - N_1) \simeq 0$$

となり,  $N_2 \simeq N_1$  となるので吸収はゼロとなる. これは, 誘導放出により吸収が打ち消されている事を意味する. 吸収がゼロとなるだけで反転分布は達成されない.

- ・すなわち, 2準位系では正味の増幅はなく, 吸収のみが生じる.
- ・反転分布を得るためには, よりエネルギーの高い別の準位が必要となる.

## ●飽和パラメータ(飽和強度)

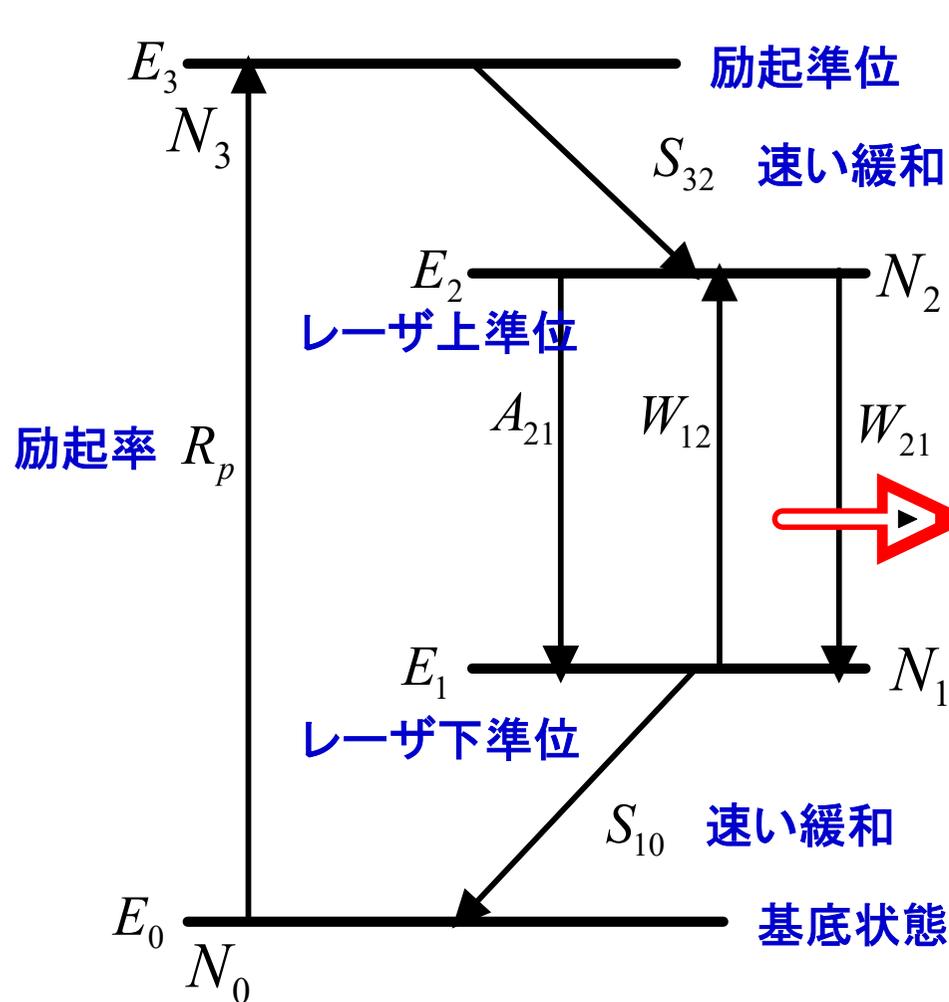
- ・2準位系の吸収係数は, (2-11), (2-18)より, 次式で与えられる.

$$\alpha = \sigma_a \Delta N = -\frac{\sigma_a N_T}{\left(\frac{I}{I_s} + 1\right)} \quad (2-20)$$

- ・  $I = I_s$  で, 吸収係数は入射強度ゼロの場合の1/2の値に低下する.  
 $I_s$  のことを飽和パラメータまたは飽和強度という.
- ・同様な考え方で, 利得係数の飽和も考えられる(別途, 4準位レーザーの解析時に解説する).

## 2.3 4準位レーザーのレート方程式と発振しきい値, スロープ効率

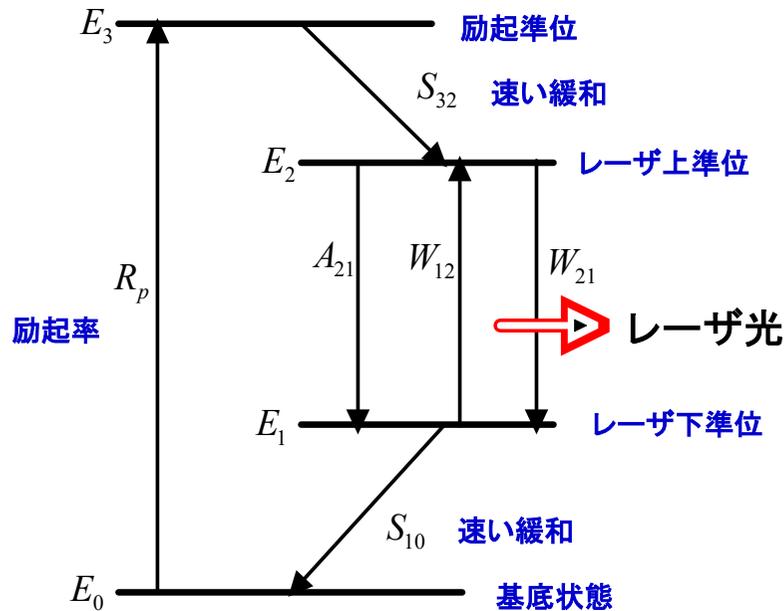
- ・レーザーは, 3準位レーザーと4準位レーザーとに大別される.
- ・ここでは, 4準位レーザーのレート方程式について, 概略を説明する.



(前提条件)

- ・  $(E_1 - E_0) \gg kT$
- ・常に, ほとんどの粒子は基底状態にあるとする.

$$R_p \equiv W_p (N_0 - N_1) \approx W_p N_0 \quad (2-21)$$



$N_i$ :  $i$  準位の粒子数密度  
[ $1/cm^3$ ]

$$\frac{dN_3}{dt} = R_p - N_3 S_{32}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = R_p - N_2 A_{21} - W_{21} N_2 + W_{12} N_1$$

励起率
誘導吸収確率  
自然放出確率
誘導放出確率  
[1/s]

$$\frac{dN_1}{dt} = -N_1 S_{10} + N_2 A_{21} + W_{21} N_2 - W_{12} N_1$$

- 4準位レーザーの場合,  $S_{32}, S_{10}$  の遷移が急速なので, 反転分布粒子数密度  $n$  は, 以下のように近似できる.

$$n = N_2 - N_1 \approx N_2 \quad (2-22)$$

● 次に発振しきい値について考えよう.

・4準位レーザーの場合には,

$$g = \sigma_e n \cong \sigma_e N_2 \quad (2-23) \quad [cm^2 \cdot \frac{1}{cm^3}] = [1/cm]$$

・発振しきい値, すなわちレーザー利得と共振器内全損失とが等しい場合には, 資料ISLD(1)より,

$$\frac{1}{1 - \underbrace{[(\alpha_L l + 2a_w) + t_2 / 2]}_{\text{共振器片道損失(single-pass loss)}}} = \exp(gl) \quad (2-24)$$

の関係がある. 共振器片道損失(single-pass loss)

・発振しきい値となるレーザー利得係数を  $g_{th}$  とし

$$\exp(g_{th}) \cong 1 + g_{th} l$$

の近似を用いると, (2-24)は, 次式となる.

$$\frac{1}{1 - [(\alpha_L l + 2a_w) + t_2 / 2]} = 1 + g_{th} l$$

・共振器内損失は通常非常に1より小さいことを考えると,

$$[(\alpha_L l + 2a_w) + t_2 / 2] \ll 1$$

であり, 近似公式  $(1+x)^{-1} \simeq 1-x$  ( $x \ll 1$ ) を用いると, 次式が成り立つ.

$$g_{th} l = (\alpha_L l + 2a_w) + t_2 / 2 \quad (2-25)$$

$$2(\alpha_L l + 2a_w) \equiv a \quad (\text{共振器一往復損失})$$

$$t_2 \equiv T \quad (\text{出力鏡透過率})$$

とすると, (2-25)は次式となる.

$$g_{th} l = \frac{(T + a)}{2} \quad (2-26)$$

・一方, 4準位レーザーの上準位についてのレート方程式より,

$$\frac{dN_2}{dt} = R_p - N_2 A_{21} - W_{21} N_2 + W_{12} N_1$$

発振しきい値では,  $0 = R_p - N_2 A_{21}$ となる. 何故なら, レーザ発振がないとして, 誘導項は無視できる.

・発振に至る励起強度に対する励起率を  $R_{pth}$  とすると,

$$R_{pth} = N_{2th} A_{21} = \frac{N_{2th}}{\tau}$$

を得る ( $R_p \rightarrow R_{pth}, N_2 \rightarrow N_{2th}$  と置き換えた). (2-26)より,

$$g_{th} l = \sigma_e N_{2th} l = (T + a) / 2 \quad \text{なので, 次式を得る.}$$

$$R_{pth} = \frac{(T + a)}{2\sigma_e \tau l} \quad (2-27)$$

- ・固体レーザーCW発振出力式は、次式で与えられることを資料ISLD(1)で示した。

$$P_{out} = \frac{I_s}{2} AT \left( \frac{2g_o l}{a+T} - 1 \right) \quad [W]$$

- ・ここで、 $g_o l \equiv KP_p$  とおいて書き直すと、次式を得る。

(利得係数は、励起パワーに比例する。)

Pump power

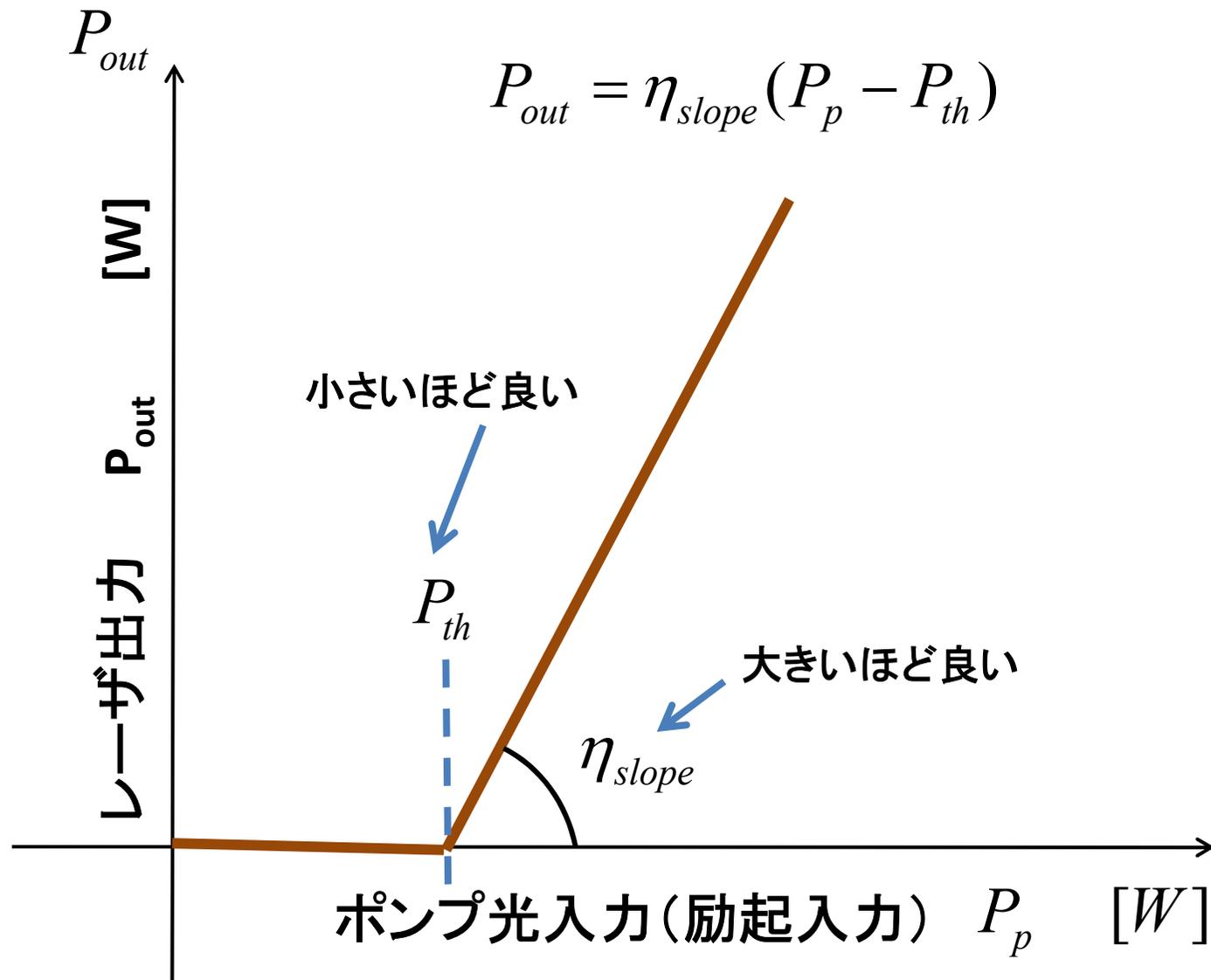
$$P_{out} = \frac{I_s}{2} AT \left( \frac{2g_o l}{a+T} - 1 \right) = \left( \frac{T}{T+a} \right) AI_s K \left( P_p - \frac{(T+a)}{2K} \right)$$

$$= \eta_{slope} (P_p - P_{th})$$

ここで、

$$P_{th} \equiv \frac{T+a}{2K} \quad \eta_{slope} \equiv \frac{TAI_s K}{T+a} \quad : \text{Slope効率}$$

- ・下図の特性の良し、悪しによって、レーザ技術者の技量が試される？

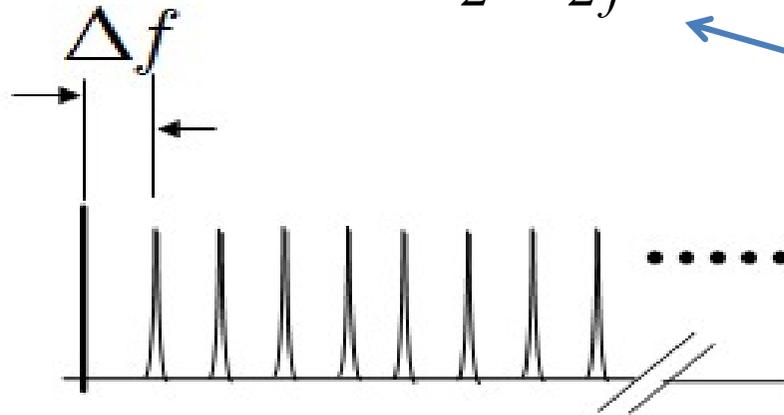


## 2.4 レーザ共振器の縦モード

### 2枚の鏡で構成された光共振器を考える

- 共振器の中では、左右進行波が存在する。これらが重ね合わされ、定在波となっている。定在波の周波数でしか波は強まらない。これを共振周波数(モード)という。

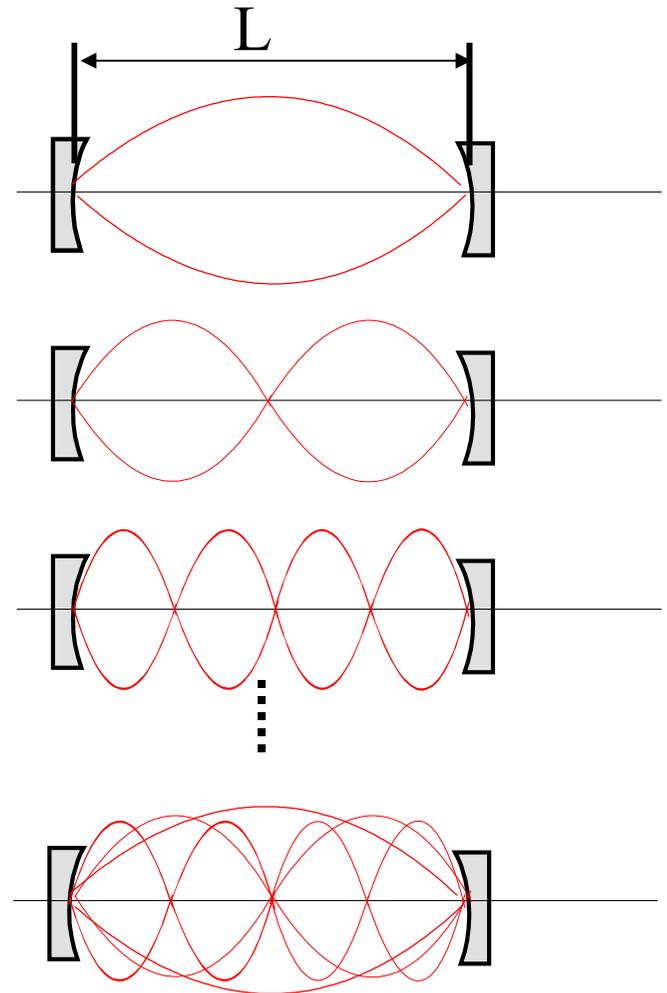
- 最低次モードは、 $L = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f}$  の関係がある



$$f = \frac{c}{2L}$$

- モード間隔  $\Delta f$  のことを基本縦モード間隔という

$$\Delta f = \frac{c}{2L} \quad L=1.5\text{m} \quad \text{の場合} \quad \Delta f = 100\text{MHz}$$



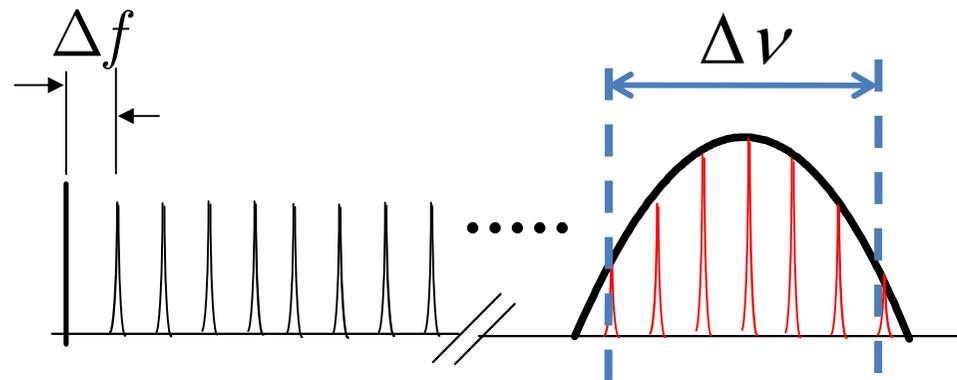
- 共振モードとレーザ利得が重なった部分で発振可能となる.

スペクトル幅が波長幅でおよそ0.5nmのレーザ媒質がある,  
周波数幅  $\Delta\nu$  に直すと約100GHz.

発振する縦モードは, 何本だろうか?ただし, 共振器長は  
10cm, レーザの発振波長は1064nmとする.

$$\Delta f = \frac{c}{2L} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 0.1} = 1.5 \times 10^9 [Hz]$$

$$\frac{\Delta\nu}{\Delta f} = \frac{10^{11}}{1.5 \times 10^9} \cong 70 \quad \text{およそ70本の縦モードで発振することになる.}$$



## [Problem1]

発振波長 $\lambda=1\mu\text{m}$ , 発振スペクトル幅 $\Delta\lambda=10\text{nm}$ , 共振器長 $L=50\text{cm}$ のレーザーがある. スペクトル幅内に入る縦モードすべてで発振すると仮定する.

(1)基本たてモード間隔 $\Delta\nu$ (周波数)を計算しなさい.

(2)このレーザー光に含まれる縦モードの本数 $N$ はおよそ何本か?

---

●ヒント 波長幅と周波数幅との換算

$$f\lambda = c \quad f = \frac{c}{\lambda} \quad \text{より, } df = (-1)\lambda^{-2}d\lambda c$$

よって, 発振スペクトル波長幅  $\Delta\lambda$  を周波数幅  $\Delta f$  に換算する式は,

$$\Delta f = -\frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda$$

[補足]  $I = c\rho$

光の速度  $[\frac{cm}{s}]$       エネルギー密度  $[\frac{J}{cm^3}]$

光強度 = 単位時間, 単位面積を通過する光エネルギー

$$[\frac{W}{cm^2}] = [\frac{J}{s \cdot cm^2}]$$

$$S = 1cm^2$$

